



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
INSTITUTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, HUMANAS E SOCIAIS
CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA – HABILITAÇÃO EM FÍSICA

ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO DA TERRA
ATRAVÉS DA SOMBRA DE UM GNÔMON

JOSÉ AUGUSTO PEREIRA

SINOP - MT
2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
INSTITUTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, HUMANAS E SOCIAIS
CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA – HABILITAÇÃO FÍSICA

ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO DA TERRA
ATRAVÉS DA SOMBRA DE UM GNÔMON

JOSÉ AUGUSTO PEREIRA

Monografia apresentada à componente curricular Monografia II, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática – Habilitação em Física.

SINOP - MT
2017

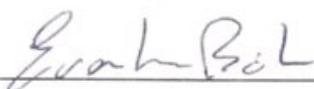
Orientador: Prof. Me. Everton Botan
Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais
UFMT – *Campus Sinop*

Co-Orientador: Prof. Dr. Mazílio Coronel Malavazi
Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais
UFMT – *Campus Sinop*

José Augusto Pereira

ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO DA TERRA ATRAVÉS DA SOMBRA
DE UM GNOMON

Monografia aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Ciências Naturais e Matemática – Habilitação em Física pela Universidade Federal de Mato Grosso, Câmpus Universitário de Sinop, pela comissão formada pelos professores:



Prof. Me. Everton Botan

Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais

UFMT – Câmpus Sinop

(Orientador)

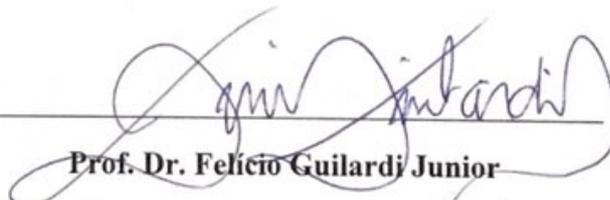


Prof. Dr. Edson Pereira Barbosa

Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais

UFMT – Câmpus Sinop

(Membro)



Prof. Dr. Felício Guilardi Junior

Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais

UFMT – Câmpus Sinop

(Membro)

Sinop, 16 de dezembro de 2017

Aos meus pais, amigos, professores e colegas.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais que no decorrer desse período sempre estiveram presentes nos momentos que precisei, sempre prontos para me ajudar e nos momentos de alegrias para comemorarmos. Pela capacidade de acreditar em mim, proporcionando segurança e a certeza de que eu não estava só nessa caminhada.

Ao meu irmão Jean Carlos, pelas suas interrupções constantes em momentos onde já não achava mais solução ou encontrava ordem nos pensamentos, pelos instantes de distração que trazia serenidade e por seu incentivo e apoio constante.

À minha colega de graduação Ingda, que me acompanhou durante o período da coleta de dados, pelo incentivo e a ajuda durante várias etapas do trabalho.

Ao professor Dr. Mazílio Coronel Malavazi, por todo tempo disponibilizado para me assistir e tornaram possível a conclusão desse trabalho.

Ao professor Me. Everton Botan, meio orientador, pela paciência e o incentivo durante todas as etapas para conclusão do trabalho.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação escolar até esse momento, bem como aos amigos e colegas que fiz durante esses anos.

*“Aquilo que escuto eu esqueço,
aquilo que vejo eu lembro, aquilo
que faço eu aprendo.”*
Confúcio

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE FIGURAS	9
RESUMO	10
ABSTRACT	11
INTRODUÇÃO	12
MATERIAIS E MÉTODOS	13
MODELAGEM E ANÁLISE	16
Obtenção das hipérbolas e os pontos de meio dias solares	16
Obtenção da curva dos meio dias solares.....	19
CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	23
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	24
APÊNDICE: TÉCNICA DE MODELAGEM NO GEOGEBRA.....	26

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Informações sobre os meio dias solares.....	18
---	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Estrutura e Gnômon instalados para marcações do comprimento das sombras.....	14
Figura 2: Exemplo de Marcações realizadas	14
Figura 3: Distribuição das sombras do Gnômon geradas pelo Geogebra.....	15
Figura 4: Os pontos de uma das marcações estão na parte inferior. Os pontos espelhados na parte superior. Na parte inferior mostramos a curva canônica que melhor se ajustou aos pontos. Com ela, identificamos o meio dia solar (MS).....	18
Figura 5: Pontos de meio dias solares onde o eixo vertical representa o comprimento da sombra em mm e o eixo horizontal representa os dias do ano juliano.	19
Figura 6: Função que descreve a curva da Figura 7.....	21
Figura 7: gráfico do comprimento dos meio dias solares durante o período observado com a curva senoidal que melhor se ajustou aos dados (Legenda coincide com a da Tabela 1).	21
Figura 8: Tabela para o ajuste de curvas por dia de medição.	26
Figura 9: Matriz e lista de pontos obtidas após início do ajuste pelo método dos Mínimos Quadrados.	28
Figura 10: Matriz V definida.	28
Figura 11: Matriz G que representa um lado do ajuste.....	29
Figura 12: Dimensão da matriz 1.....	29
Figura 13: Definição do segundo lado da igualdade do ajuste dos Mínimos Quadrados.....	29
Figura 14: Representa o ajuste finalizado.....	30
Figura 15: Ajuste onde o valor de deslocamentos dos pontos n eixo Y teve de ser maior que 35.35.....	31
Figura 16: Ajuste de Curva onde o valor de deslocamento no eixo Y foi maior que 35.25.....	31
Figura 17: Ajuste realizado através de método linear.....	32
Figura 18: Planilha utilizada para cálculo do dia juliano.....	33
Figura 19: Tabela utilizada para determinar os dados para o ajuste de curvas da série de Fourier	34
Figura 20: Função $G(x)$ foi a melhor se ajusta a lista de pontos obtidas	35

RESUMO

A experimentação é uma forma eficiente de propor um trabalho interdisciplinar e muitas vezes na área do ensino de física não se faz necessários o uso de laboratórios. Este trabalho propõe uma estratégia de ensino de astronomia utilizando o Gnômon (uma estaca presa perpendicularmente ao solo). Provavelmente este é um dos instrumentos mais antigo utilizado pelo homem para marcar o tempo. Com este mesmo instrumento observamos o movimento aparente do Sol e buscamos apresentar uma outra exploração, além das já conhecidas, abordando os movimentos da Terra e as estações do ano. Através da observação das sombras projetadas pelo gnômon, o trabalho buscou descrever com álgebra um modelo os meios dias solares.

Palavras-chave: Ensino de Física, Métodos dos Mínimos Quadrados, Gnômon, Ajuste por séries de Fourier.

ABSTRACT

Experimentation is an efficient way of proposing an interdisciplinary work and often in the field of physics teaching it is not necessary to use laboratories. This work proposes a strategy of teaching astronomy using the Gnomon (a stake attached perpendicularly to the ground). Probably this is one of the oldest instruments used by man to mark the time. With this same instrument, we observe the apparent movement of the Sun and seek to present another exploration, besides those already known, addressing the movements of the Earth and the seasons of the year. Through the observation of the shadows projected by the gnomon, the work sought to describe with algebra a model the half solar days.

Keywords: Physics Teaching, Least Squares Methods, Gnômon, Fourier Serial Adjustment.

INTRODUÇÃO

É consenso entre os pesquisadores de ensino que atividades práticas, experimentos, diversidade de materiais didáticos e estratégias diferenciadas de ensino permitem estender o alcance dos objetivos do ensino em qualquer área de conhecimento.

Este trabalho apresenta uma proposta para o uso de um instrumento antigo e muito simples para explorar inúmeros conceitos de Física e Astronomia. O que faremos é mostrar como é possível entender muito sobre os movimentos de rotação e da translação Terra a partir da sombra, ao Sol, que os objetos projetam.

Em síntese, a sombra de uma estaca pregada ao chão (gnômon) toma a aparência de um tipo particular de curva conhecida como hipérbole. No conjunto dessas curvas estão presentes muitas informações sobre como, com o passar dos dias, o movimento aparente diário do Sol no céu muda durante o ano. Procuraremos, então, estudar a possibilidade de descrever a órbita da Terra através da sombra de um gnômon.

A princípio, um conjunto de atividades já foram propostas para o gnômon. Afonso (1996) e Gavidia (2014), por exemplo experiências para determinar o meio-dia solar, os quatro pontos cardeais, as estações do ano, a altura do Sol, a latitude do lugar e a declinação do Sol. Nas atividades sugeridas pelos autores, o professor pode facilmente explorar os conceitos básicos sobre o movimento da Terra e localização, relacionando com conceitos matemáticos, como proposto por Salvador (2009) que utilizando a projeção da sombra de um gnômon pode determinar o meridiano local, construir a rosa dos ventos, calcular alturas de objetos inacessíveis e a circunferência da Terra. Contudo, nenhum dos trabalhos consultados explora a possibilidade de desvendar as propriedades da órbita da Terra a partir da sombra. É sobre este problema que nos debruçamos.

Nosso trabalho envolveu registro quinzenal sistemático das sombras projetadas pelo gnômon durante o período de 03/05/2015 a 01/05/2016. A análise e construção da ferramenta foi desenvolvido inteiramente utilizando o *software* Geogebra¹ usando as ferramentas geométricas e dinâmicas do Geogebra. O processo de análise e construção do modelo envolveu em síntese uma modelagem matemática.

¹ GeoGebra é um *software* livre de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, gráficos, estatística e cálculo numa aplicação relativamente simples de utilizar. Tem uma comunidade em rápida expansão, com milhões de utilizadores localizados em praticamente todos os países. Tornou-se líder no fornecimento de *software* de matemática dinâmica, apoiando a ciência, tecnologia, engenharia, matemática, educação e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. (GeoGebra, 2017)

Desta forma, descreveremos neste trabalho, todo o processo de registro, análise e construção do modelo da órbita da Terra descrito a partir da sombra de uma simples estaca ao Sol. Não nos ateremos no que tange as atividades já bem consolidadas sobre o uso do Gnômon em atividades didáticas. Buscaremos apresentar um novo olhar sobre este instrumento, sobre como sua sombra pode revelar informações sobre os movimentos da Terra em torno do Sol.

MATERIAIS E MÉTODOS

A primeira etapa do projeto foi a construção de um gnômon com uma base fixa que permitiu o registro da sombra por um período aproximado de um ano. Tivemos dificuldade em registrar todo o período devido às chuvas características do verão na região. Para isto, construímos uma estrutura de madeira, firme e nivelada a cerca de um metro do chão, no *campus* da UFMT de Sinop², em frente ao Laboratório de Física.

Utilizamos como superfície rígida e plana uma placa de porcelanato com larguras de 80 por 80 cm. No centro do porcelanato fixou-se uma haste perpendicular de 9,9 cm de altura. A estrutura e marcações são mostradas nas figuras 1 e 2.

Os dados foram coletados de 15 em 15 dias no período de 03/05/2015 a 01/05/2016. A ponta da sombra foi registrada de 15 em 15 minutos. As medidas foram feitas utilizando um paquímetro analógico (Mitotoyo, modelo: 530-109) de 300 mm, tomando como referência o centro do ponto marcado. As coordenadas dos pontos foram registradas numa planilha e os pontos são mostrados no gráfico da figura 3. Os eixos de referência para as medidas foram as orientações geográficas definidas na primeira marcação.

O procedimento para identificar as orientações geográficas utilizado foi realizada na primeira marcação da sombra do dia, faz-se um círculo de raio com centro na haste do gnômon e extremo no ponto marcado. Registra-se os dados até que a sombra alcance o círculo no outro extremo da base. Traça-se uma reta a partir desses dois pontos que interceptam o círculo – primeira e última medida. Esta direção é paralela ao equador e indica as direções Leste-Oeste. Conseqüentemente a direção perpendicular corresponde à direção Norte-Sul. Estabelece-se, então, nosso sistema de referência para as medidas.

² Sinop é uma cidade no interior do Mato Grosso, localizada nas coordenadas 11°51'51" S e 55°30'09" W, onde se localiza o Campus da UFMT que realizamos a pesquisa.



Figura 1: Estrutura e Gnômon instalados para marcações do comprimento das sombras.

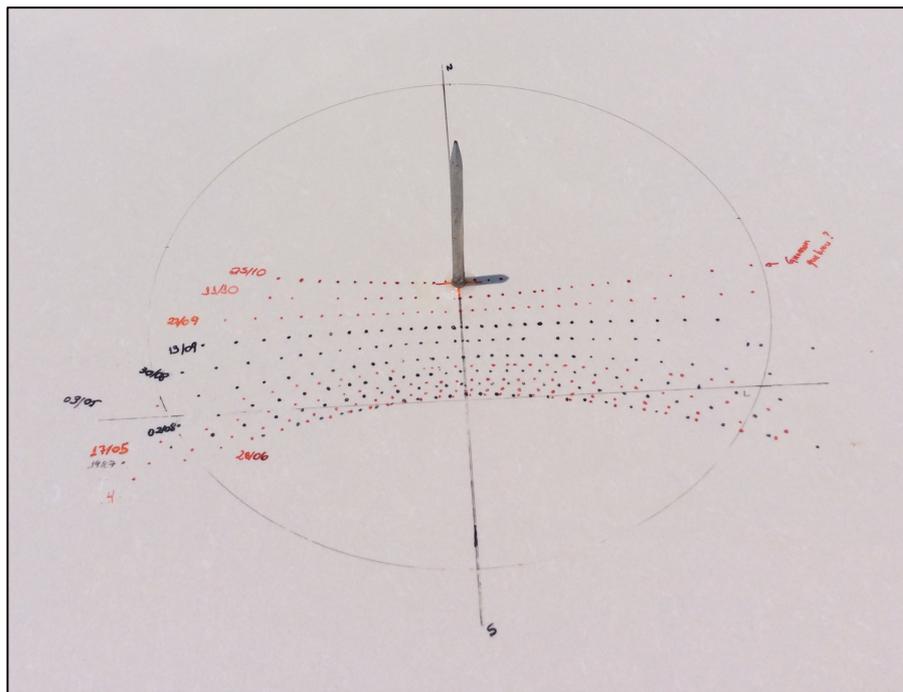


Figura 2: Exemplo de Marcações realizadas

Na figura 3, cada curva de pontos representa medidas da sombra em dias diferentes. O meio dia solar corresponde aos pontos que coincidem com o eixo vertical. A curva de menor curvatura (13/09/2015 e 20/03/2016) corresponde aos equinócios local, de primavera e outono consecutivamente, enquanto as de maior curvatura corresponderiam aos solstícios local, de verão na parte superior do gráfico que ocorreria próximo a 23/12 não observável e de inverno na parte inferior do gráfico. A curva de equinócio revela a latitude local, pois o ângulo formado

entre a haste e os raios luminosos correspondem aos $11,5^{\circ}$ de latitude da Cidade de Sinop. Esta observação é explorada didaticamente nos trabalhos de Afonso (1996) e Gavidia (2014) referenciados anteriormente.

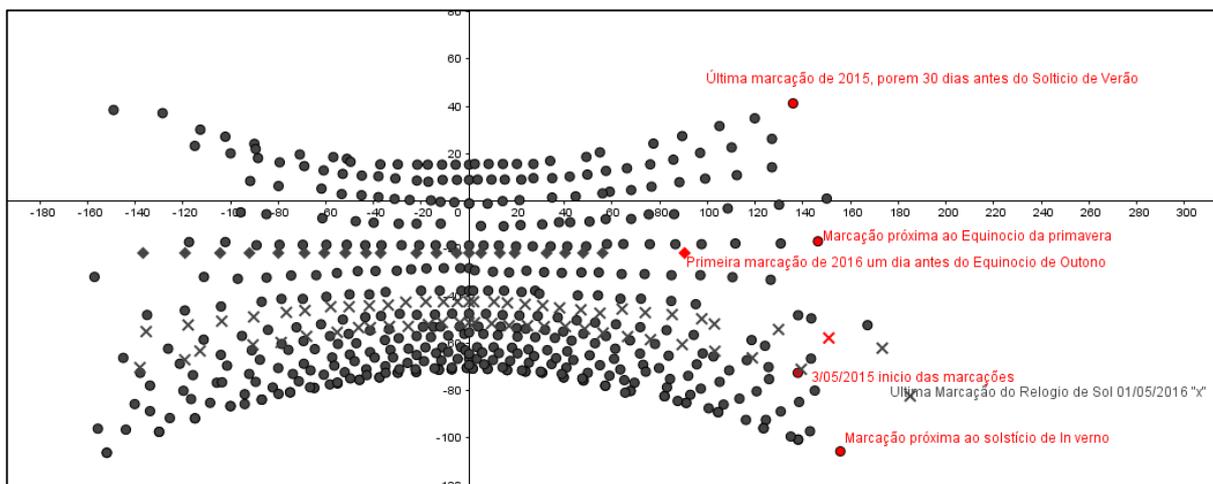


Figura 3: Distribuição das sombras do Gnômon geradas pelo Geogebra

MODELAGEM E ANÁLISE

Obtenção das hipérbolas e os pontos de meio dias solares

Conforme vemos figura 3 não foi possível marcar os meios dias solares e possivelmente os marcados podem apresentar um erro pequeno oriundo da medição ou marcação do mesmo, desta forma para de encontra-los utilizamos um método algébrico para definir as funções que descrevem as curvas, que parecem com a série de pontos marcadas, para isso faremos o uso da técnica de aproximação dos Mínimos Quadrados para obter as funções, que melhor descrevem as curvas dos pontos marcados utilizaremos a aproximação utilizando as hipérbolas por melhor se aproximar de forma visual as curvas apresentadas pelas sombras e apenas para os equinócios que se aproximam de uma reta utilizaremos uma função da reta.

O método de análise de dados por Mínimos Quadrados é considerado uma das melhores formas para se ajustar curvas a uma determinada amostra de dados oriunda de medidas, pois ela ajusta a curva para o menor erro quadrático (ANTON e RORRES, 2012). Utilizamos este método para encontrar as hipérbolas e a curva senoidal da mudança do comprimento da sombra de meio dia solar durante o ano. A descrição detalhada da técnica de redução das curvas no Geogebra é apresentada no apêndice deste trabalho.

Seu nome se origina do fato de que ao aplicá-lo para ajustar curvas buscamos aproximar de uma forma que dado o ponto $m(x_i)$ medido teremos um ponto $f(x_i)$ da função que escolhemos para o ajuste e que o erro médio quadrático

$$\chi = \sum_{i=1}^N (m(x_i) - f(x_i))^2$$

seja o menor possível.

Para a análise dos dados e encontrar os meio dias solares utilizamos o ajuste com a equação geral das Cônicas:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

em que A, B, C, D, E, F são constantes reais. Além disso, A, B e C são não nulos simultaneamente.

Utilizando a translação, se necessária, podemos assumir $F \neq 0$, e então reescrever a equação acima como:

$$\frac{A}{F}x^2 + \frac{B}{F}y^2 + \frac{C}{F}xy + \frac{D}{F}x + \frac{E}{F}y = -1.$$

As marcações das sombras no gnômon transformadas em coordenadas nos fornecem os valores para “x” e “y”, tal que podemos obter os demais valores (“x²”, “y²” e “xy”) que compõem a fórmula. Assim, podemos definir as seguintes variáveis (parâmetros) a serem determinadas pelo método dos mínimos quadrados:

$$a = \frac{A}{F}; b = \frac{B}{F}; c = \frac{C}{F}; d = \frac{D}{F}; e = \frac{E}{F}$$

E construímos o vetor V :

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

tal que seja formado pelas constantes a serem encontradas para obter a curva que melhor se ajusta aos dados da observação.

Se considerarmos o seguinte sistema de equações em que o subscrito n é o índice de um dos pontos (coordenadas da ponta da sombra do gnômon) de uma das marcações:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1^2 + cx_1y_1 + dx_1 + ey_1 &= -1 \\ ax_2^2 + bx_2^2 + cx_2y_2 + dx_2 + ey_2 &= -1 \\ &\vdots \\ ax_n^2 + by_n^2 + cx_ny_n + dx_n + ey_n &= -1 \end{aligned}$$

Podemos construir a matriz:

$$M = \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & x_ny_n & x_n & y_n \end{pmatrix}$$

Desta forma, M é a matriz que contém os valores das variáveis “x” e “y”. A representação do sistema de equações na forma matricial é dada por:

$$M.V = B$$

Onde do lado esquerdo temos um produto das matrizes M e V , e do lado direito, B é uma matriz coluna em que todos os seus valores são iguais a -1.

Em geral, esse sistema linear acima não possui solução algébrica, pois isso implicaria na existência da função que passa exatamente sobre os pontos, o que em geral não é possível devido aos erros de medição por exemplo. Por outro lado:

(...) dado qualquer sistema linear $Ax = b$, o sistema normal associado $A^T.A.x = A^T.b$ é consistente, e todas as soluções de $A^T.A.x = A^T.b$ são soluções de mínimos quadrados de $Ax = b$. (ANTON e RORRES, 2012, p. 368)

Neste contexto, soluções de mínimos quadrados de $A \cdot x = b$ correspondem a uma solução aproximada, onde o erro quadrático é mínimo.

Desta forma, no processo de modelagem, encontramos as constantes a partir do sistema linear:

$$M^T \cdot M \cdot V = M^T B$$

que nos dará os coeficientes da solução para a curva cônica que mais se ajusta aos dados. Nesse sistema M^T é a matriz transposta de M .

Na figura 4 mostramos os pontos de uma das marcações, com os pontos refletidos, a curva canônica (hipérbole) e seu respectivo mínimo (meio dia solar – MS). Após determinarmos as curvas de todas as marcações fomos capazes, então, de encontrar cada meio dia solar, os quais são apresentados na Tabela 1.

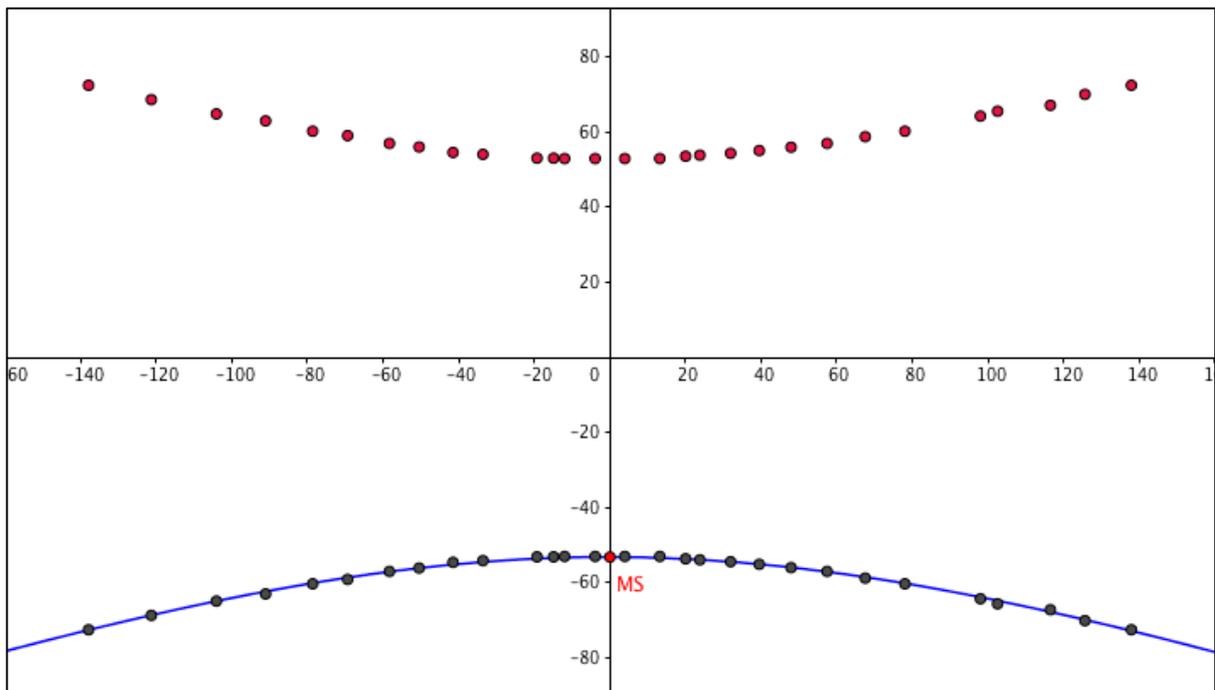


Figura 4: Os pontos de uma das marcações estão na parte inferior. Os pontos espelhados na parte superior. Na parte inferior mostramos a curva canônica que melhor se ajustou aos pontos. Com ela, identificamos o meio dia solar (MS).

Tabela 1: Informações sobre os meio dias solares.

Data	Dia Juliano	Legenda	Comprimento (mm)
03/05/2015	123	C	-15,28
17/05/2015	137	I	-23,76
31/05/2015	151	P	-29,49
14/06/2015	165	E	-32,25
28/06/2015	179	N	-32,60
19/07/2015	200	J	-26,29
02/08/2015	214	B	-18,81
16/08/2015	228	F	-10,40
30/08/2015	242	O	-0,55

13/09/2015	256	A	7,36
27/09/2015	270	M	18,39
11/10/2015	284	D	27,35
25/10/2015	298	L	37,10
08/11/2015	312	R	45,79
22/11/2015	326	K	52,11
20/03/2016	79	T	15,35
17/04/2016	107	S	-7,53
01/05/2016	121	Q	-13,88

Obtenção da curva dos meio dias solares

Na apresentamos o gráfico dos pontos de meio dias solares obtidos pelo passo anterior. Descreveremos agora como obtemos a curva periódica que representa o comprimento da sombra do gnômon durante o ano. Faremos isso através de sua representação em Série de Fourier.

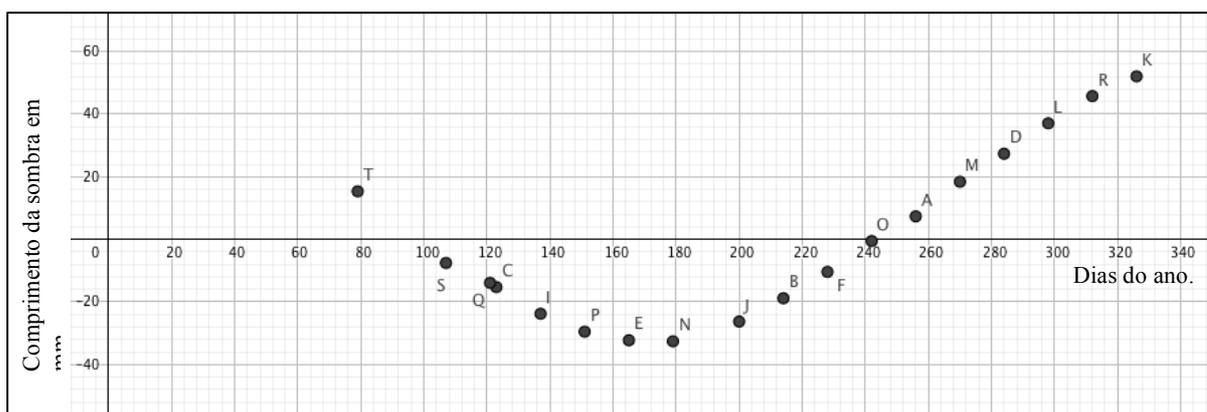


Figura 5: Pontos de meio dias solares onde o eixo vertical representa o comprimento da sombra em mm e o eixo horizontal representa os dias do ano juliano.

Ocorre que toda função periódica possui um período ou ciclo que chamaremos de T . No nosso caso o período assume o valor de 365,25 (número de dias do ano). Como a frequência é a inversa do período, teremos:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{365}$$

Além disso, a frequência angular ω é relacionada à frequência f por:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365}$$

Para nossa situação, a Série de Fourier (trigonométrica) pode ser definida como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

na qual, os termos a_0 , a_n , b_n são constantes, n representa o índice da série e L o período da função que queremos expressar. Expandindo a série até terceira ordem, teremos:

$$y = f(x) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) + \left(a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + b_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) + \left(a_3 \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + b_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right) + \dots$$

Podemos reescrever essa função para a dispersão dos pontos mostrada na figura 5. Para isso, faremos y_i representar o comprimento da sombra do gnômon no meio dia solar do dia juliano x_i , com $i = 1, \dots, 18$ e $L=182,5$ a metade do período de medição, temos

$$y_i \cong f(x_i) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos\left(\frac{\pi x_i}{182,5}\right) + b_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x_i}{182,5}\right) \right) + \left(a_2 \cos\left(\frac{2\pi x_i}{182,5}\right) + b_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x_i}{182,5}\right) \right) + \left(a_3 \cos\left(\frac{3\pi x_i}{182,5}\right) + b_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x_i}{182,5}\right) \right)$$

Novamente, a expressão acima pode ser reescrita como um sistema de equações lineares ($M.V=B$), e utilizando mínimos quadrados nos permita obter as variáveis presentes no vetor V :

$$V = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{x_1\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{x_1\pi}{182,5}\right) & \cos\left(\frac{2x_1\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{2x_1\pi}{182,5}\right) & \cos\left(\frac{3x_1\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{x_1\pi}{182,5}\right) \\ \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{x_2\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{x_2\pi}{182,5}\right) & \cos\left(\frac{2x_2\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{2x_2\pi}{182,5}\right) & \cos\left(\frac{3x_2\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{x_2\pi}{182,5}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{x_n\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{x_n\pi}{182,5}\right) & \cos\left(\frac{2x_n\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{2x_n\pi}{182,5}\right) & \cos\left(\frac{3x_n\pi}{182,5}\right) & \text{sen}\left(\frac{x_n\pi}{182,5}\right) \end{pmatrix}$$

Chamemos B o vetor com os comprimentos das sombras do gnômon que apresentamos na Tabela 1, tal que:

$$B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

que resolvendo o sistema linear:

$$M^T \cdot M \cdot V = M^T B$$

- encontraremos os valores dos coeficientes da série que no nosso caso são representados no vetor V , e então a função que melhor se ajusta aos meio dias solares para esse modelo é

$$g(x) = -\frac{1950922840247}{250000000000} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{365}\pi x\right) + \frac{437435774121}{500000000000} \operatorname{sen}\left(\frac{4}{365}\pi x\right) - \frac{2936689824157}{1000000000000} \operatorname{sen}\left(\frac{6}{365}\pi x\right) + \frac{2235453382561}{50000000000} \operatorname{cos}\left(\frac{2}{365}\pi x\right) + \frac{5568708074403}{1000000000000} \operatorname{cos}\left(\frac{4}{365}\pi x\right) + \frac{233281930809}{200000000000} \operatorname{cos}\left(\frac{6}{365}\pi x\right) + \frac{1371915463807}{1000000000000}$$

Figura 6: Função que descreve a curva da

A curva resultante é apresentada na figura 7. Como podemos ver, a forma dessa curva é uma senoide.

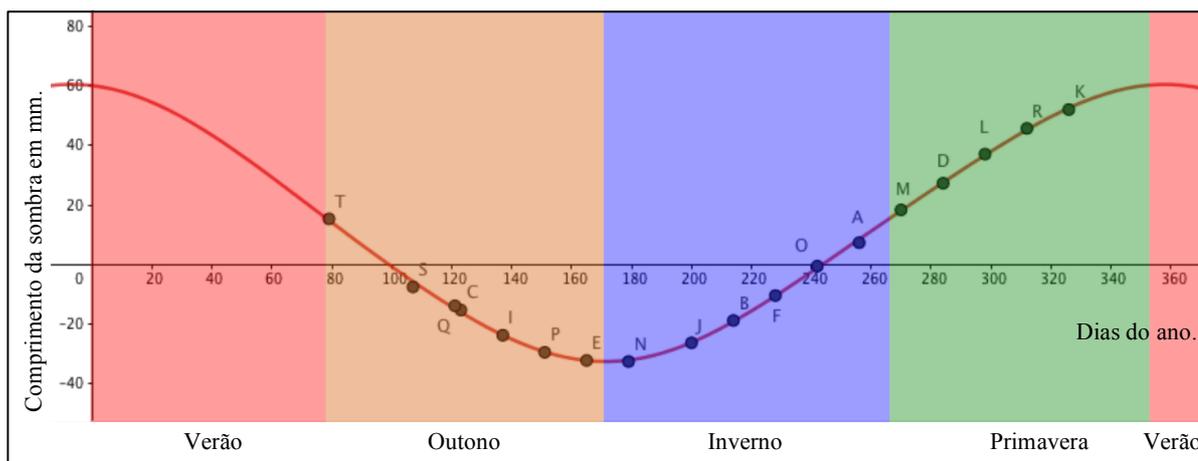


Figura 7: gráfico do comprimento dos meio dias solares durante o período observado com a curva senooidal que melhor se ajustou aos dados (Legenda coincide com a da Tabela 1).

Os primeiros pontos a observar neste gráfico (da figura 6) é que os dois pontos da curva que interceptam o eixo dos dias do ano correspondem aos dois dias em que em Sinop faz sombra zero – o Sol ao meio dia está a pino. Os pontos T e M são os dois pontos mais próximos aos equinócios, de outono e primavera respectivamente (estes pontos apenas interceptariam com o eixo dos dias do ano caso estivéssemos no Equador). Isto significa que próximo aos dias em T o Sol passa a estar mais ao Norte e em M mais ao Sul em relação ao Equador, mas em nossa região isto ocorre nos pontos de sombra zero, logo antes de S e próximo a O.

A ausência de pontos entre dezembro e janeiro é devido ao período chuvoso, o que aumentou a incidência de nuvens e pancadas de chuvas, dificultando as marcações das sombras.

Além disso, demarcamos com faixas coloridas as regiões que correspondem aproximadamente as estações do ano. Então a região entre o período de 80 a 260 compreendem as estações do ano do outono e do inverno no hemisfério sul, pois temos o equinócio de outono no dia 21 de março (próximo ao ponto T) quando os raios solares estão em perpendicular com a linha do Equador e o solstício de inverno que ocorre no dia 21 de junho, quando os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Câncer no hemisfério norte. O período

entre 260 a 365 tivemos o equinócio de primavera no hemisfério sul que ocorre no dia 23 de setembro (próximo ao ponto M) e o solstício de verão que ocorre no dia 23 de dezembro. Desta forma, observamos o movimento aparente do sol no plano o gnômon (sombras). Demarcamos, na figura 7, com faixas coloridas as regiões que correspondem aproximadamente as estações do ano.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Pudemos através da sombra de uma simples estaca encontrar a equação para o modelo que descreve o movimento aparente do Sol na cidade de Sinop. Descrevemos o comportamento da sombra e a relação com as estações do ano. Acreditamos que ainda é possível estabelecer relações entre as leis de Kepler e também construir um sistema que estabeleça a posição da Terra na órbita e a sombra na superfície. Isto, deixamos com perspectivas de trabalho futuro e/ou ideias a outros estudantes que desejem continuar nosso trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

AFONSO, G. B. **Experiências Simples com o Gnômon**. Revista Brasileira de Ensino de Física, versão online, vol. 18, n • 3, p. 149-154, set. 1996.

TREVISAN, R. H.; LATTARI, C. J. B. **Investigando a aprendizagem de astronomia no ensino fundamental, usando um método experimental**. In: IV Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 2003, Bauru. Atas. Bauru. Abrapec, 2004.

SALVADOR, J. A. **Ciências e Matemática do Sol e do Gnômon**. Disponível em: http://www2.dm.ufscar.br/profs/salvador/jornada/Ciencias_e_Matematica_do_Sol_e_do_Gnomon.pdf. Acesso em 31 mai. 2015.

GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra?** [2017? a], disponível em <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 22 out. 17

BECKER. **O uso do GeoGebra como ferramenta de aprendizagem no Estudo de áreas de retângulos e triângulos**. Disponível em <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134163/000983679.pdf?sequence=1>. Acesso 22 out. 2017.

FREDERICO, F.T., GIANOTTO, D.E.P. **Utilização de Software no ensino de Física e Matemática: Desafio e Reflexões**. Diálogos & Saberes, Mandaguari, v. 9, n.1, p.39-59, 2013. Disponível em <http://seer.fafiman.br/index.php/dialogosesaberes/article/view/324>. Acesso 22 out. 2017.

COSTA, H. R. **A Modelagem Matemática Através De Conceitos Científicos**. 2009 Ciências & Cognição 2009, vol 14. Disponível em <http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/issue/archive>. Acesso em 19 nov. 2017.

CAMPOS, L.S., ARAÚJO; M.S.T. **A Modelagem Matemática e a Experimentação Aplicadas ao Ensino De Física**. VII Enpec, Florianópolis 2009. Disponível em <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viiienpec/> acesso 19 nov. 2017.

Burak, D. **Modelagem Matemática e a Sala de Aula**. 2004. Disponível em <http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/regina/materiais/modelagem.pdf> acesso 19 nov. 2017.

BEJARANO, N. R. R.; CARVALHO, A. M. P. de. **A História de Eli**. Um professor de Física no início de carreira. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 2, p. 165-178, 2004.

CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M. **La transposition didatique: du savoir savant au savoir enseigné**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 2. ed. Campinas: Papyrus, 2004. (Série Prática Pedagógica).

MAIA, C. M.; SCHEIBEL, M. F. **Didática: organização do trabalho pedagógico**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2006. 200 p;

MARTINS, J. P. **Didática Geral**: fundamentos, planejamento, metodologia, avaliação. 2. Ed. São Paulo, SP: Atlas, 1990;

VEIT, E. A.; TEODORO, V. D. **Modelagem no Ensino/Aprendizagem de Física e os Novos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 24, N° 2, junho, 2002.

VYGOTSKY, L. S. (1999). **A formação social da mente**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes.

AMARAL, I. A. **Conhecimento formal, experimentação e estudo ambiental**. *Ciência & Ensino*, n. 3, p. 10-15, dez. 1997.

BATISTA, M. C., FUSINATO, P. A., BLINI, R. B.; **Reflexões sobre a importância da experimentação no ensino de Física**. *Acta Scientiarum Human and Social Sciences*, 2009.

HIGA, I.; OLIVEIRA, O. B.; **A experimentação nas pesquisas sobre o ensino de Física: fundamentos epistemológicos e pedagógicos**. *Educar em Revista*, n.44, p.75-92, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602012000200006>. Acesso em: 10 de out. 2017.

SERÉ, M. G. et al. **O papel da experimentação no Ensino da Física**. *Caderno Brasileiro Ensino da Física*, v. 20, n. 1, p. 30-42, abr. 2003. Disponível em: <http://www.paulorosa.docente.ufms.br/Pratica_III/Sere_Coelho_Nunes_O_papel_experimentacao.pdf>. Acesso em 13 de nov. de 2017.

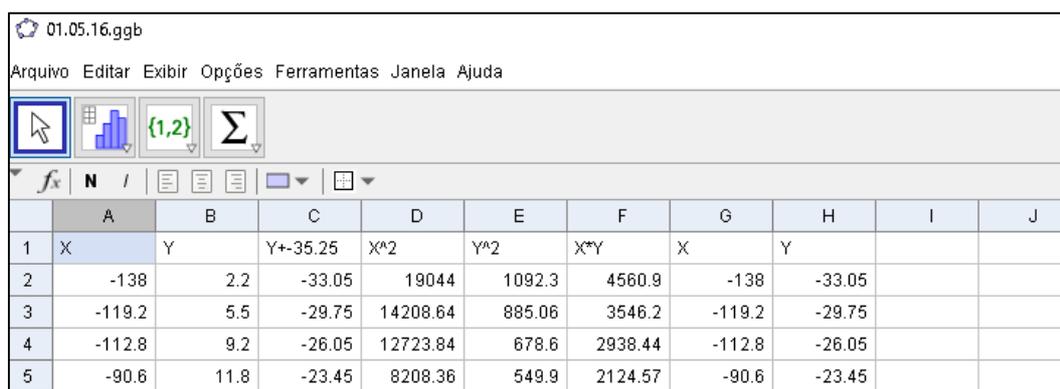
APÊNDICE: TÉCNICA DE MODELAGEM NO GEOGEBRA

Análise e interpretação dos dados utilizamos programas como planilhas eletrônicas neste caso o Microsoft Excel e programas de plotagem gráfica e de análise estatística o Geogebra.

Os dados coletados com os dados coletados utilizamos de métodos matemáticos para podermos gerar as curvas que melhor descrevesse os pontos observados para isso usamos o método dos mínimos quadrados e posteriormente Séries de Fourier para chegarmos na equação que descreve a distribuição dos pontos dos meios dias solares em relação ao dia juliano qual a informação foi coletada.

A primeira parte da modelagem é buscar os meios dias solares que definimos aqui como o ponto em que a hipérbole intercepta o eixo y. A maior parte do ajuste tratamos a curva como hipérbole, e utilizamos o método de ajuste pelos mínimos quadrados, para ajustar a curva no formato de hipérbole sendo $\frac{A}{F}x^2 + \frac{B}{F}y^2 + \frac{C}{F}xy + \frac{D}{F}x + \frac{E}{F}y = -1$ que para aplicamos no GeoGebra realizamos os seguintes passos:

1. No GeoGebra criamos uma tabela com 8 colunas com títulos “X”, “Y”, “Y+35.25”, “X^2”, “Y^2”, “X*Y”, “X” e “Y”, onde X e Y são as coordenadas dos pontos em relação ao sistema de referência e “Y+35.25” corresponde ao deslocamento da haste do gnômon para o centro do plano cartesiano, pois é conveniente que o façamos. O exemplo é apresentado na figura 7



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X	Y	Y+35.25	X^2	Y^2	X*Y	X	Y		
2	-138	2.2	-33.05	19044	1092.3	4560.9	-138	-33.05		
3	-119.2	5.5	-29.75	14208.64	885.06	3546.2	-119.2	-29.75		
4	-112.8	9.2	-26.05	12723.84	678.6	2938.44	-112.8	-26.05		
5	-90.6	11.8	-23.45	8208.36	549.9	2124.57	-90.6	-23.45		

Figura: 7Tabela para o ajuste de curvas por dia de medição.

2. Depois de inserir os valores A e B medidos vamos realizar a reflexão dos pontos em relação ao eixo “X”, desta forma vamos alterar o sinal dos pontos do eixo “Y”, desta forma dobraremos o número de pontos;

3. Na coluna A e B inserimos o valor medido com o paquímetro, na coluna C realizamos a adição ou subtração do valor 35.25 (nota no Geogebra não se utiliza virgula para decimais e sim ponto) para o valor “Y” medido e o refletido que pode ser escrito com a formula “=B2-35.25” e pode ser arrastado preenchendo automaticamente toda a coluna, que passar a será o valor que vamos assumir para “Y” de agora em diante;
4. Agora na coluna “X^2” vamos utiliza o medido e elevado ao quadrado pode ser escrito como “=A2^2”, “Y^2” vamos utilizar o valor medido e refletido obtido na coluna “Y+OU-35.25” e eleva-lo ao quadro escrito como “=C2^2”, na coluna “X*Y” iremos multiplicar os valores da coluna “X” pelo da “Y” escrito como “=A2 * C2”, na coluna “X” apenas repetir o valor medido escrito como = A2 ou pode simplesmente copiar e colar e na “Y” considerar o valor de “Y+OU-35.25” poder ser escrito como “=C2” ou apenas copei e cole;
5. Agora que temos a planilha de dados vamos criar a lista pontos seleccione os dados “X” e “Y” das colunas G e H, clique com o botão esquerdo do mouse abre uma janela de opções vai em criar>lista de pontos;
6. Agora crie uma matriz seleccionado os dados da coluna D até H, clique novamente como o botão esquerdo do mouse, no menu suspenso criar>matriz;
7. Agora iremos trabalhar com a janela CAS sporem já e visível uma lista de pontos va janelas de visualização 2D e uma matiz e lista de pontos na Janela de Algebra como abaixo;

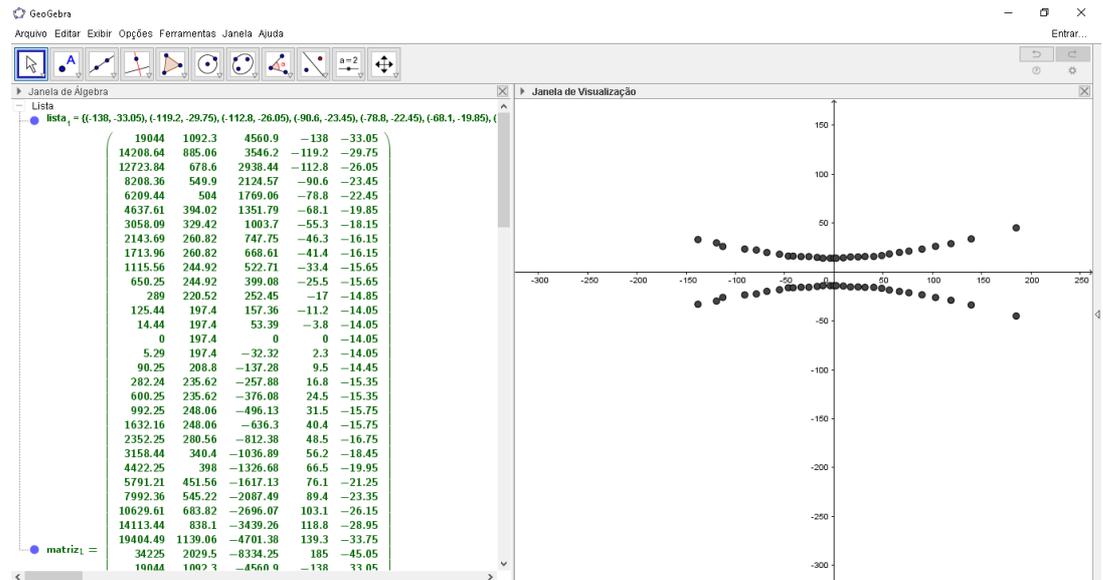


Figura 8: Matriz e lista de pontos obtidas após início do ajuste pelo método dos Mínimos Quadrados.

8. Agora vamos trabalhar com a janela CAS onde iremos iniciar de fato a inserção dos comandos que vão realizar o Ajuste dos Mínimos Quadrados, para exibi-la no menu exibir ou ctrl+shift+K;
9. Primeiramente vamos criar uma matriz de incógnitas que serão “a, b, c, d, e”, para isso utilizamos o comando na linha de número 1 $v:=\text{MatrizTransposta}\{a,b,c,d,e\}$, onde “v” será a matriz e pra nomeá-la direto utilizamos os “:”;

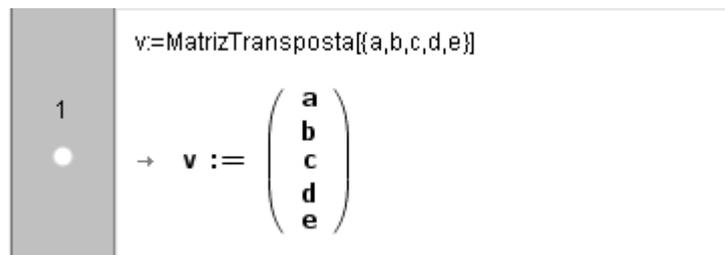


Figura 9 Matriz V definida.

10. Depois utilizaremos o comando $g:=\text{MatrizTransposta}[\text{matriz1}]*\text{matriz1}*v$, onde o GeoGebra realiza o passo do ajuste de descrito como $M^T \times M \times V$;

2

g:=MatrizTransposta[matriz1]*matriz1*v

$$\rightarrow g := \begin{pmatrix} \frac{1}{20000} (114767572957300 a + 7041059895277 b + 238413515400 d) \\ \frac{1}{40000} (14082119790554 a + 914874123407 b + 29210748660 d) \\ \frac{1}{20000} (7041059895277 c + 14605374330 e) \\ \frac{1}{2000} (23841351540 a + 1460537433 b + 719335240 d) \\ \frac{1}{2000} (1460537433 c + 57349420 e) \end{pmatrix}$$

Figura 10: Matriz G que representa um lado do ajuste.

11. Agora utilizaremos o comando `Dimensão[MatrizTransposta[matriz1]]` que irá nos fornece o número de colunas e linhas da matriz transposta da matriz 1;

3

Dimensão[MatrizTransposta[matriz1]]

→ {5, 60}

Figura 11: Dimensão da matriz 1

12. Utilizaremos o comando onde o valor em “?” ira depender da informação gerada pelo comando anterior `h:=MatrizTransposta[matriz1]*MatrizTransposta[Sequência[-1, i, 1, ?]]`, como no exemplo o valor que aparece no segundo termo é 60, o comando ficaria `h:=MatrizTransposta[matriz1]*MatrizTransposta[Sequência[-1, i, 1, 60]]`

4

h:=MatrizTransposta[matriz1]*MatrizTransposta[Sequência[-1, i, 1, 60]]

$$\rightarrow h := \begin{pmatrix} -\frac{17983381}{50} \\ \frac{2867471}{100} \\ 0 \\ -333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figura 12: Definição do segundo lado da igualdade do ajuste dos Mínimos Quadrados

13. Utilizando o comando $f:=\text{Sequência}[\text{Elemento}[g, i, 1]=\text{Elemento}[h, i, 1], i, 1, 5]$ onde cruzamos as informações da matriz g que possui as incógnitas com a matriz h que possui apenas valores;
14. Com o comando $s:=\text{Soluções}[f, \{a,b,c,d,e\}]$ uma solução para f nas incógnitas $\{a, b, c, d, e\}$;
15. E por fim o comando $M_2:=\text{Soluções}[\text{Elemento}[s, 1, 1] x^2 + \text{Elemento}[s, 1, 2] y^2 + \text{Elemento}[s, 1, 3] x y + \text{Elemento}[s, 1, 4] x + \text{Elemento}[s, 1, 5] y = -1, y]$, nos apresentara o valor para cada unas das incógnitas $\{x^2, y^2, xy, x, y\}$
16. Agora com a Janela de Álgebra e de visualização abertas no campo de entrada vamos digitar os seguintes comandos;
17. Primeiro o que irá apresentar a função que melhor descreve os pontos, $\text{sbf}:=\text{Elemento}(M_2,1)$, seguido do comando $MS:= (0,\text{sbf}(0))$ que nos dará o meio dia solar.

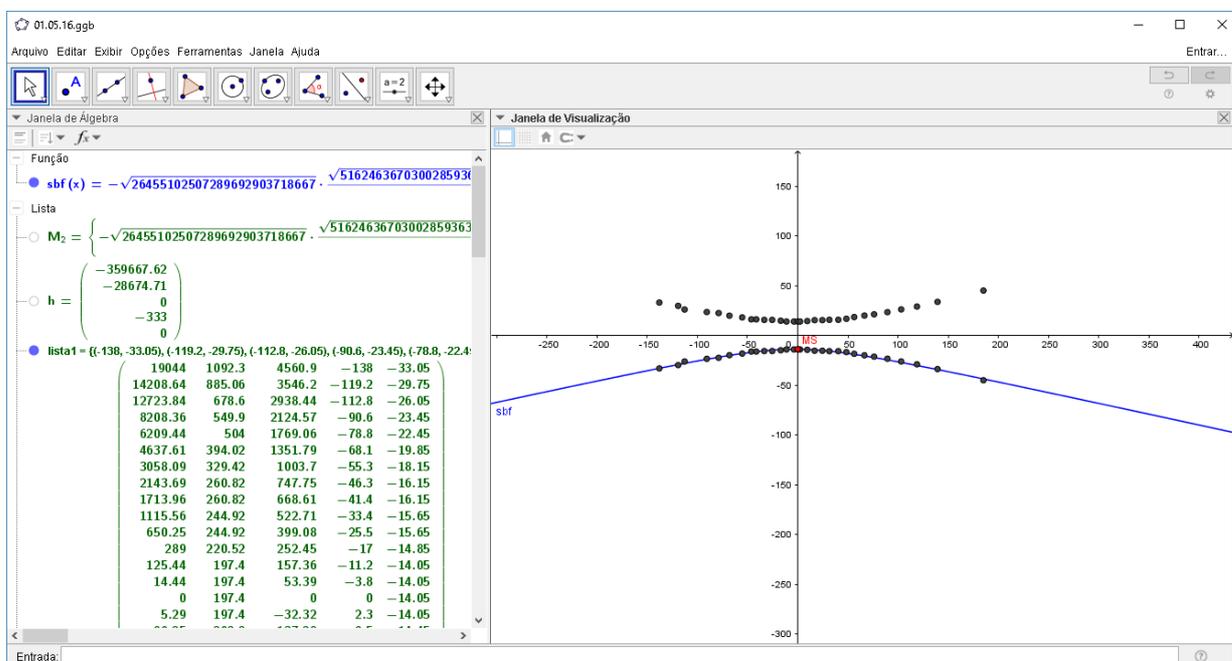


Figura 13: Representa o ajuste finalizado.

Desta forma obteremos as curvas que se ajustarão para cada dia e os meio dias solares porem pode haver series de pontos que não seja possível ajustar com as hipérboles nesse caso

seguiremos com o melhor ajuste possível, a casos onde o valor utilizado para deslocar os pontos no eixo “y” tenha de ser maior do que o padrão estipulado nesse caso desconte depois o valor que teve de ser aumentado como nos exemplos abaixo, e posteriormente o valor foi subtraído para obtermos o meio dia solar verdadeiro.

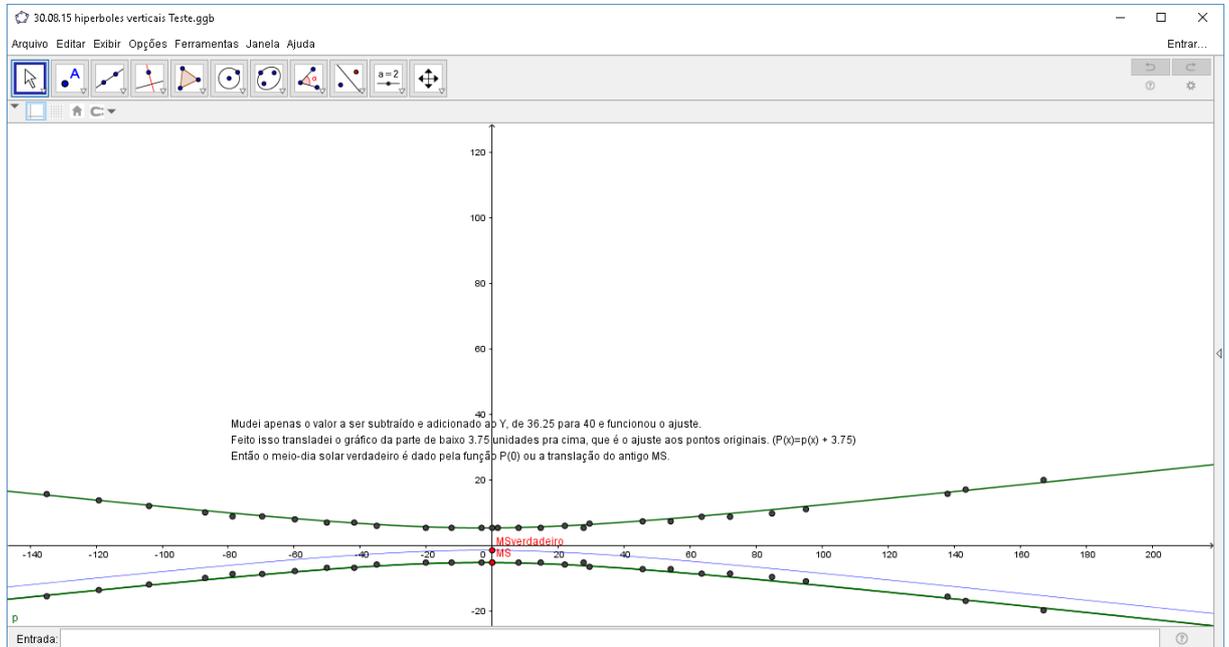


Figura 14: Ajuste onde o valor de deslocamentos dos pontos n eixo Y teve de ser maior que 35.35

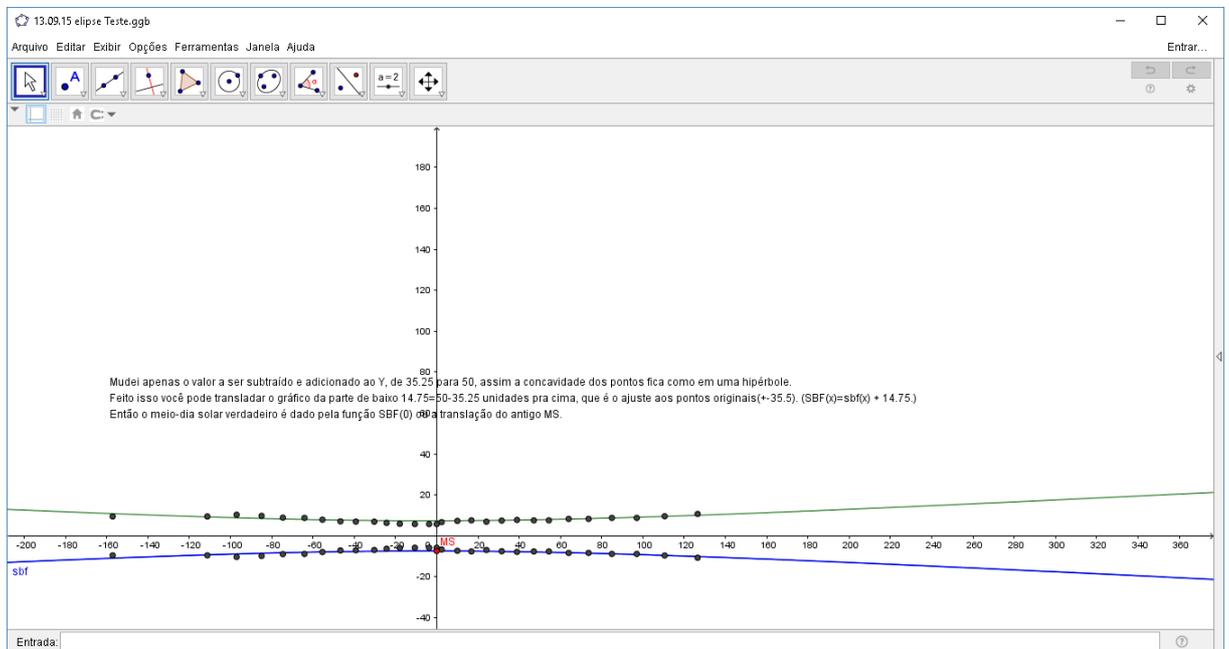


Figura 15: Ajuste de Curva onde o valor de deslocamento no eixo Y foi maior que 35.25

Houve também uma situação degenerada onde os pontos praticamente formaram uma reta para realizar o ajuste deve-se utilizar o modelo linear., um para os pontos de baixo e outro para

os de cima dividi a lista1 em duas listas lista2 e lista3 e utilizei o comando `RegressãoLinear[lista2]` e `RegressãoLinear[lista3]` para obter as retas.

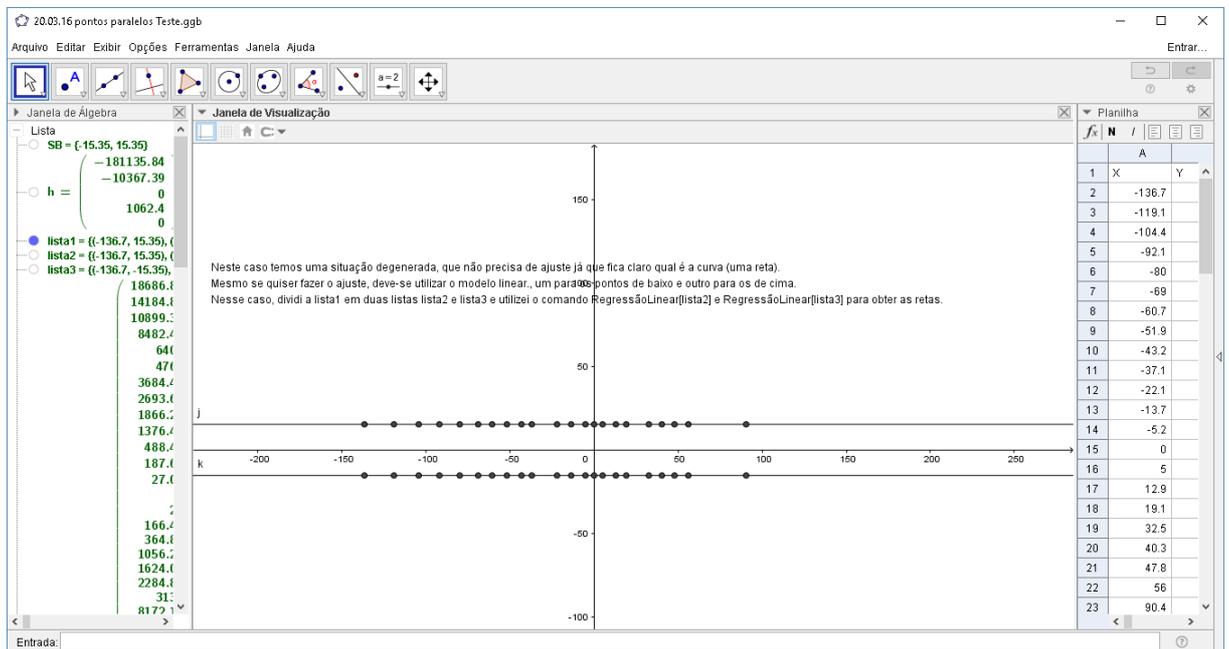


Figura 16: Ajuste realizado através de método linear

Quando obtivemos os meios dias solares para cada dia de marcação desenvolvemos uma nova planilha onde consideramos o valor para “x” sendo o dia juliano e o “y” sendo o meio dia solar encontrado e descontado o valor de 35,25 somado ou subtraído de acordo com o usado para o primeiro ajuste.

Para obter os valor do dia juliano utilizei o *software* Excel onde criei uma planilha com os dados dia, mês, ano, “x”, “y” e “DJ” conforme abaixo, para obter o valor de Dia juliano utilizei a equação de conversão de data do calendário Gregoriano para Juliano o algoritmo de conversão utilizado, para meses cujo o numeral é menor que 3 fazemos $\{[(275*\text{mês})/9]-30+\text{dia dos mês}\}$, caso o número corresponde ao mês for maior que 3 faremos da seguinte forma $\{[((275*\text{mês})/9)-30+\text{dia do mês}]-2\}$; no Excel a forma de escrita da formula na célula ficará conforme a seguir `=SE(mês<3;INT(275*mês/9-30+dia);INT(275*mês/9-30+dia)-2)`, na planilha o valor de mês é a célula da coluna B e o dia da coluna A, por exemplo se o dia for na célula A2 e o mês na B2 a formula fica assim `=SE(B2<3;INT(275*B2/9-30+A2);INT(275*B2/9-30+A2)-2)`.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dia	Mês	Ano	x	y	DJ	
2	13	9	15	0	7,36	256	
3	2	8	15	0	-18,81	214	
4	3	5	15	0	-15,28	123	
5	11	10	15	0	27,35	284	
6	14	6	15	0	-32,25	165	
7	16	8	15	0	-10,4	228	
8	17	5	15	0	-23,76	137	
9	19	7	15	0	-26,29	200	
10	22	11	15	0	52,11	326	
11	25	10	15	0	37,1	298	
12	27	9	15	0	18,39	270	
13	28	6	15	0	-32,6	179	
14	30	8	15	0	-0,55	242	
15	31	5	15	0	-29,49	151	
16	1	5	16	0	-13,88	121	
17	8	11	16	0	45,79	312	
18	17	4	16	0	-7,53	107	
19	20	3	16	0	15,35	79	
20							
21							

Figura 17: Planilha utilizada para cálculo do dia juliano.

Para montar no GeoGebra utilizei além dos valores “X” equivalente ao dia juliano DJ, e “Y” equivalente ao Meio dia Solar MS, os valores $CF_0 = \cos(0) / 2$, $CF_1 = \cos(DJ \pi / 182.5)$, $CF_2 = \sin(DJ \pi / 182.5)$, $CF_3 = \cos(2DJ \pi / 182.5)$, $CF_4 = \sin(2DJ \pi / 182.5)$, $CF_5 = -\cos(3A2 \pi / 182.5)$ e $CF_6 = \sin(3DJ \pi / 182.5)$, conforme planilha abaixo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	Y	CF0	CF1	CF2	CF3	CF4	CF5	CF6
2	256	7.36	0.5	-0.3	-0.95	-0.82	0.57	0.79	0.61
3	214	-18.81	0.5	-0.86	-0.52	0.47	0.88	0.06	-1
4	123	-15.28	0.5	-0.52	0.85	-0.46	-0.89	1	0.07
5	284	27.35	0.5	0.18	-0.98	-0.94	-0.35	-0.5	0.86
6	165	-32.25	0.5	-0.95	0.3	0.82	-0.57	-0.62	0.79
7	228	-10.4	0.5	-0.71	-0.71	0	1	0.7	-0.71
8	137	-23.76	0.5	-0.71	0.71	0	-1	0.7	0.71
9	200	-26.29	0.5	-0.95	-0.3	0.82	0.57	-0.62	-0.79
10	326	52.11	0.5	0.78	-0.62	0.23	-0.97	-0.43	-0.9
11	298	37.1	0.5	0.41	-0.91	-0.67	-0.74	-0.95	0.31
12	270	18.39	0.5	-0.06	-1	-0.99	0.13	0.19	0.98
13	179	-32.6	0.5	-1	0.06	0.99	-0.12	-0.98	0.18
14	242	-0.55	0.5	-0.52	-0.85	-0.46	0.89	1	-0.07
15	151	-29.49	0.5	-0.86	0.52	0.47	-0.88	0.06	1
16	121	-13.88	0.5	-0.49	0.87	-0.52	-0.85	1	-0.03
17	312	45.79	0.5	0.61	-0.79	-0.25	-0.97	-0.92	-0.39
18	107	-7.53	0.5	-0.27	0.96	-0.86	-0.52	0.73	-0.69
19	79	15.35	0.5	0.21	0.98	-0.91	0.41	-0.59	-0.81
20									

Figura 18: Tabela utilizada para determinar os dados para o ajuste de curvas da série de Fourier

Realizado a montagem desta tabela criei uma lista chamei de lista1, uma lista de pontos que chamei de lista3, e utilizando a janela CAS realizei os seguintes passos.

1. Com o comando $\text{lista1N}:=\text{MatrizTransposta}[\text{lista}_1]$ criei uma matriz a partir da lista1;
2. Com o comando $\text{lista2N}:=f(\text{lista1N})$ onde apliquei os pontos da lista1 na função $f = f(x)\cos(2x) + \text{sen}(3x)$;
3. Utilizando o comando $v:=\text{MatrizTransposta}[\{\text{cf0},\text{cf1},\text{cf2},\text{cf3},\text{cf4},\text{cf5},\text{cf6}\}]$ criei uma matriz para os CF0, ..., CF6;
4. $G:=\text{MatrizTransposta}[\text{matriz}_1]*\text{matriz}_1*v$ criei a matriz G que equivale a $M^T \times M \times V$, um lado da igualdade do ajuste de mínimos quadrados;
5. Com o comando $\text{Dimens\~{a}o}(\text{MatrizTransposta}(\text{matriz}_1))$ para obter o número de colunas e linhas da matriz;

6. Utilizando o comando $H:=\text{MatrizTransposta}[\text{matriz}_1]*\text{matriz}_2$ onde a matriz um corresponde ao DJ e matriz 2 ao MS equivalente a $M^T \times b$;
7. Utilizei o comando $ff:=\text{Sequência}(\text{Elemento}(G, i, 1)=\text{Elemento}(H, i, 1), i, 1, 7)$, para fazer a comparação $M^T \times M \times V = M^T \times b$;
8. Com o comando $CF:=\text{Soluções}(ff, \{cf0, cf1, cf2, cf3, cf4, cf5, cf6\})$ obtive o valor de cada incógnita;
9. Utilizei o comando para transformar em matriz CF que era dado em lista $CFN:=\text{MatrizTransposta}(CF)$;
10. Com o comando $g(x):=\text{Elemento}(CFN, 1, 1) / 2 + \text{Elemento}(CFN, 2, 1) \cos(x \pi / 182.5) + \text{Elemento}(CFN, 3, 1) \sin(x \pi / 182.5) + \text{Elemento}(CFN, 4, 1) \cos(2x \pi / 182.5) + \text{Elemento}(CFN, 5, 1) \sin(2x \pi / 182.5) + \text{Elemento}(CFN, 6, 1) \cos(3x \pi / 182.5) + \text{Elemento}(CFN, 7, 1) \sin(3x \pi / 182.5)$, obtive a função $g(x)$ que melhor se adapta a lista de pontos lista3 que são os pontos Dj para “x” e MS para “y”, conforme abaixo.]

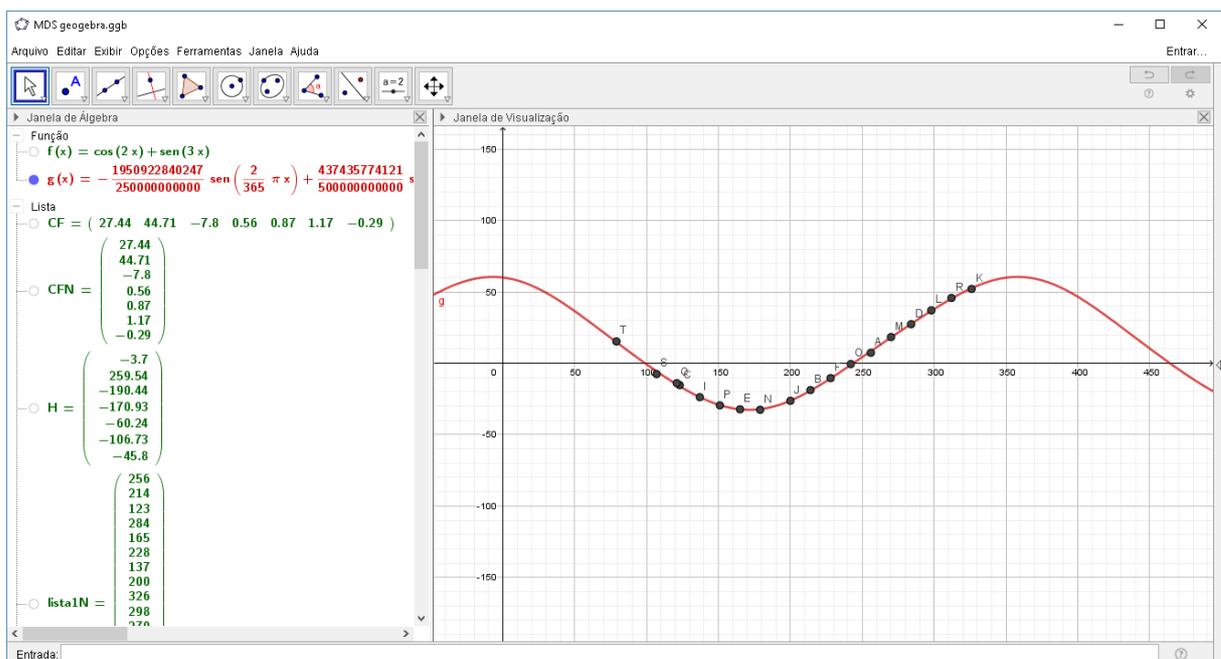


Figura 19: Função $G(x)$ foi a melhor se ajusta a lista de pontos obtidas